# تقدير الأخطاء

• الخطأ المطلق : - $e_x = |x - x_0|$ حيث $x$ قيمة العدد ، $x_0$ قيمة تقريبية له

- الحد الأعلى للخطأ المطلق : $|x - x_0| \leq \varepsilon$

• الخطأ النسبي : $\eta_x = \frac{|x - x_0|}{|x|} = \frac{e_x}{|x|}$

• الحد الأعلى للخطأ النسبي : $\delta x = \frac{\varepsilon}{|x_0|}$

• تراكم الأخطاء :

| النسبي | المطلق |
|---|---|
| $\eta_{x+y} \leq \max(\delta x, \delta y)$ | $e_{x+y} = e_x + e_y$ |
| $\eta_{x-y} \leq \frac{e_{x-y}}{\lvert x-y \rvert}$ | $e_{x-y} = e_x + e_y$ |
| $\eta_{xy} \leq \eta_x + \eta_y$ | $e_{x \cdot y} = \lvert y_0 \rvert e_x + \lvert x_0 \rvert e_y$ |
| $\eta_{x/y} \leq \eta_x + \eta_y$ | $e_{x/y} = \frac{e_x}{\lvert y_0 \rvert} + \left\lvert \frac{x_0}{y_0^2} \right\rvert e_y$ |

• حالة $U = \frac{x^n y^m}{z^k} \Leftarrow \delta U = n\delta x + m\delta y + k\delta z$

• إذا كان $x = x_0 \pm e_x$ : $e_x$ هي الخطأ المطلق و $\delta_x = \frac{e_x}{x_0}$ = الخطأ النسبي

$x =$ عدد فإن $\boxed{e_x = 5\times10^{-t}}$ و $t$ هي عدد الأرقام المضبوطة مضافة له واحد.

$e_x = 5\times10^{-4}$ ; $x = 5,432$

• الأرقام المعنوية :

أ- على يسار العدد : (الأصفار) ليست أرقام معنوية.

ب- = يمين = : = هي أرقام معنوية باستثناء القوى والأس.

أمثلة :

| | | |
|---|---|---|
| 0,0000400 (3) | 0,000201 (3) | 2,034 (4) |
| 5000 (1) | 25,50 (4) | 0,0237 (3) |
| 0,0005 (1) | 258,00 (5) | 9000,0 (5) |
| 15,11 (4) | 900,00005 (8) | 5008 (4) |
| 0,0009 (1) | 200,00 (5) | 0,700 (3) |
| | 8010,1001 (8) | 5432 (4) |

## قواعد التقريب :

١- إذا كان الرقم المراد إسقاطه أقل من 5 : نسقطه ونسقط كل الأرقام التي تليه بدون تغيير .

٢- إذا كان الرقم المراد إسقاطه أكبر من 5 : نسقطه ونسقط كل الأرقام التي تليه ونضيف للرقم الأخير (1) .

٣- إذا كان الرقم المراد إسقاطه = 5

أ- العدد (5) متبوع برقم غير صفري : نسقطه ونسقط الأرقام التي تليه ونضيف للرقم الأخير 1

ب- العدد (5) متبوع بصفر أو غير متبوع بشيء :

* نسقطه ونسقط الأرقام التي تليه ونضيف للرقم الأخير 1 إذا كان فردي

* نسقطه ونسقط الأرقام التي تليه ولا نضيف شيئاً إذا كان الرقم الأخير زوجي

$1,6324 = 1,632$

$2,7391 = 2,74$

$6,4755 = 6,476$

$8,425 = 8,42$

$4,135 = 4,14$

## الأخطاء المرتكبة في حساب التوابع :

① الخطأ المطلق في حساب $y=f(x)$ : $x = x_0 \pm e_x$

$$\boxed{e_y = e_x\,|f'(x_0)|}$$

② الخطأ النسبي الحدي المرتكب : $\delta_y = \frac{e_y}{|f(x)|} = \left|\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x)}\right| \delta_x$

③ حالة تابع لعدة متحولات $f(x,y,z)$

• $e_f = e_x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + e_y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + e_z\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$

• $\delta_f = \left|\frac{x f'_x}{f}\right|\delta_x + \left|\frac{y f'_y}{f}\right|\delta_y + \left|\frac{z f'_z}{f}\right|\delta_z$

بالنهاية : $\boxed{u = u_0 \mp e_f = u_0(1 \pm \delta_f)}$

مثال ①

$y = \sqrt[3]{x^2}$ احسب قيمة y من أجل $x = 8000 \pm 3$ .

$x_0 = 8000,\ e_x = 3$ , $e_y = e_x|f'(x_0)|$ ; $= x^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(8000) = \frac{2}{3\times 20} = \frac{1}{30}$

$\Rightarrow e_y = \frac{3}{30} = 0,1 \Rightarrow y = y_0 + e_y = \sqrt[3]{(8000)^2} \pm 0,1 = \boxed{400 \pm 0,1}$

لتقدير الاخطاء

(2) $U = x^2y$ احسب الخطأ النسبي المرتكب والخطأ المطلق واحسب قيمة $U$ مع الخطأ

$x = 100 \pm 0{,}1$

$y = 50 \pm 0{,}05$

$$\delta u = \left|\frac{x f'_x}{f}\right| \delta x + \left|\frac{y f'_y}{f}\right| \delta y = \left|\frac{x \cdot 2xy}{x^2y}\right| \delta x + \left|\frac{y \cdot x^2}{x^2y}\right| \delta y$$

الحل

$$= 2\delta x + \delta y \quad : \quad \delta x = \frac{e_x}{x_0} = \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001$$

$$\delta y = \frac{e_y}{y_0} = \frac{0{,}05}{50} = 0{,}001$$

$$\Rightarrow \delta u = 2\times10^{-3} + 10^{-3} = 3\times10^{-3}$$

$$e_u = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} = 10^{-1} \times 2\times100\times50 + 5\times10^{-2}\times100^2$$

$$= 1500 \quad : \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \;\; \& \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$\cdot\; f_0 = x_0^2 y_0 = 100^2 \times 50 = 500000$$

$$\Rightarrow f = f_0 \pm e_f \Rightarrow \boxed{U = 500000 \pm 1500}$$

(3) احسب $f = \frac{3{,}219 + 2{,}73\times1{,}842}{8{,}7193}$ مع تبيين الخطأ المطلق المرتكب.

* $f_0 = 0{,}9459085$ باجراء الحساب

* $e_{xy} = |x_0| e_y + |y_0| e_x = 2{,}73 \times 5\times10^{-4} + 1{,}842 \times 5\times10^{-3} = 0{,}010575$ لعرض الجداء

* $e_{x+y} = e_x + e_y = 5\times10^{-4} + 0{,}010575 = 0{,}011075$

* $e_{x/y} = \frac{e_x}{y_0} + \left|\frac{x_0}{y_0^2}\right| e_y = 0{,}0012755 \Rightarrow \boxed{f = 0{,}9459085 \pm 0{,}001275}$

(3)

# حل المعادلات الخطية

## 1 الطرق التحليلية: $AX=B$

X مصفوفة المجاهيل ، A مصفوفة الأمثال

أ- الطريقة المصفوفية:

$$X = A^{-1}\cdot B$$

حيث يلزم معرفة $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\, adj(A)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{a_1}^{+} & \Delta_{a_2}^{-} & \Delta_{a_3}^{+} \\ \Delta_{a_4}^{-} & \Delta_{a_5}^{+} & \Delta_{a_6}^{-} \\ \Delta_{a_7}^{+} & \Delta_{a_8}^{-} & \Delta_{a_9}^{+} \end{pmatrix}^t$$

ب- طريقة كرامر: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ حيث $\Delta_i$ هو المحدد بعد أن نستبدل عمود $i$ بالعمود الموجود في الطرف الثاني (العمود B).

ج- طريقة حذف غوص (المصفوفة الموسعة) وأكبر ما يمكن بالقيمة المطلقة نستبدل بين الأسطر بحيث يكون أول عنصر أكبر ما يمكن بالقيمة المطلقة وهو ما ندعوه بمرتكز الحذف الأول (وهو أكبر عنصر في العمود الأول بالقيمة المطلقة).

د- تفريق المصفوفة A إلى مثلثية عليا وسفلى (LU)

$$A = LU \Rightarrow AX=B \Leftrightarrow LUX=B \quad : \text{نفرض } UX=Y$$

$$LY=B \Rightarrow Y=L^{-1}B \Rightarrow UX=L^{-1}B \Rightarrow \boxed{X=U^{-1}L^{-1}B}$$

تفريق A :

$$A = LU \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 الطرق العددية:

أ- طريقة جاكوبي التكرارية

القانون التكراري: $x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$

- شرط التقارب لطريقة جاكوبي

$$\|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

يجب تحقق الشرط على جميع الأسطر.

- شرط التوقف: $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \varepsilon$

**مثال**

$$4x-2y-z=4$$
$$2y-z=-4$$
$$x+2z=5$$

1) متتالية التكرار الموافقة لطريقة جاكوبي

$$x^{(k)} = 1 + \frac{1}{2}y^{(k-1)} + \frac{1}{4}z^{(k-1)}$$
$$y^{(k)} = -2 + \frac{1}{2}z^{(k-1)}$$
$$z^{(k)} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x^{(k-1)}$$

• شرط التقارب:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \|\alpha\|_\infty = \max\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

فالمتتالية متقاربة من الحل

ب- طريقة غوص سايدل التكرارية

القانون التكراري:

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

تتمة حل التمرين مستخدماً الحل (1,1,1) كحل ابتدائي

| k | 1 | 2 |
|---|---|---|
| x | $1\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| y | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ |
| z | 2 | $\frac{13}{8}$ |

....

• طريقة غوص سايدل

$$x^{(k)} = 1 + \frac{1}{2}y^{(k-1)} + \frac{1}{4}z^{(k-1)} \quad (1)$$
$$y^{(k)} = -2 + \frac{1}{2}z^{(k-1)} \quad (2)$$
$$z^{(k)} = +\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x^{(k)} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}y^{(k-1)} + \frac{1}{4}z^{(k-1)}\right)$$
$$z^{(k)} = 2 - \frac{1}{4}y^{(k-1)} - \frac{1}{8}z^{(k-1)} \quad (3)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \|\alpha\|_\infty < 1 \text{ محقق}$$

| k | 1 | 2 |
|---|---|---|
| x | $\frac{7}{4}$ | |
| y | $-\frac{3}{2}$ | ---- |
| z | $\frac{13}{8}$ | |

# حل المعادلات اللاخطية

1) نظرية القيمة الوسطى: • $f$ معرف ومستمر على $I$ • $a$ و $b$ من $I$ بحيث: $f(a)\cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ يوجد $c \in ]a,b[$ حيث $f(c)=0$

• وإذا كانت $f$ مطردة تماما $\Rightarrow$ الحل $c$ وحيد

2) طريقة تنصيف المجال:

• $\boxed{x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}}$

if $f(x_n)>0 \Rightarrow x_n \rightarrow b_n$

else $x_n \rightarrow a_n$

• يتم التوقف عندما يتحقق $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ أو $\dfrac{b_n-a_n}{2} \leq \varepsilon$

• الحد الأعلى للخطأ المرافق للحل $x_n$: $\dfrac{b-a}{2^n}$

• عدد التكرارات اللازمة للحصول على M

$$n \geq \frac{\ln[10^t (b-a)]}{\ln 2}$$ : $10^{-t}$ بدقة *

$$n \geq \frac{\ln[10^t (b-a)]-\ln 5}{\ln 2}$$ : $5\times10^{-t}$ بدقة *

3) طريقة القواطع:

$$\boxed{x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}}$$

يتم التكرار حتى يتحقق الشرط $|f(x_n)| \leq \varepsilon$

4) طريقة المماسات (نيوتن):

$$n \geq 1: \boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

5) مبرهنة النقطة الثابتة

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)}$$

• حيث يتم تحويل المعادلة $f(x)=0$ إلى الشكل $g(x)=x$

• تتقارب المتتالية $x_{n+1}=g(x_n)$ من أجل أي قيمة ابتدائية $x_0$ إذا تحقق

$$|g'(x)| < 1$$

ت ر 1) $x^2+\ln x=0$ على المجال $[0.6, 0.8]$

* التنصيف

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $\frac{b_n-a_n}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,6 | 0,8 | 0,7 | 0,1333 | 0,1 |
| 2 | 0,6 | 0,7 | | | |
| ⋮ | | | | | |
| 6 | 0,65 | 0,6563 | 0,6532 | 0,0008 | 0,0031 |

الدقة $10^{-3}$

* نفس طريقة القواطع بدون العمود الأخير $\dfrac{b_n-a_n}{2}$

* طريقة نيوتن:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

* النقطة الثابتة: $\ln x = -x^2$

$x = e^{-x^2}$ : $g(x) = e^{-x^2}$

$g'(x) = -2x e^{-x^2}$ : $|g'(x)|<1$ غير محقق على $\mathbb{R}$

$x_0 = 1 \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n^2}$

| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{1}{e}$ |
| 1 | $\frac{1}{e}$ | $e^{-\frac{1}{e^2}} = 0,873$ |
| 2 | | |
| 3 | | 0,466 |

• التحقق من مبرهنة القيمة الوسطى:

• حساب عدد التكرارات بدقة $5\times10^{-3}$

• حساب الحد الأعلى للخطأ المرافق للحل $x_n$

ت ر 2) $x^2-\ln(2x)-1$

3) $x^2-e^{-x}$

$$(b^{\alpha x})' = \alpha\cdot\ln b\cdot b^{\alpha x}$$

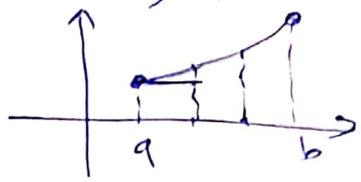
# التكامل العددي

① طريقة المستطيلات:

- $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[f_0+f_1+\cdots+f_{n-1}\right] \; ; \; h=\frac{b-a}{n}$$ الخطوة

$f_0=f(a)$

$f_n=f(b)$




- الحد الأعلى للخطأ المرتكب:

$$|e| = h\,|f(b)-f(a)|$$

② طريقة أشباه المنحرفات: التقريب بخط:

- $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[y_0+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+y_n\right]$$

- $$|e| = \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$$ : القيمة العظمى للخطأ المرتكب

③ طريقة سيمبسون: التقريب بكثير حدود من الدرجة الثانية

- يجب تجزئة المجال $[a,b]$ إلى عدد زوجي من المجالات الجزئية

- $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+4f_{n-1}+f_n\right]$$

- $$|e| = \frac{(b-a)}{180}h^4\max_{t\in[a,b]}|f^{(4)}(t)|$$ : الخطأ المرتكب

- إذا كان عدد المجالات فردي: نطبق سيمبسون على أكبر عدد زوجي من المجالات + أشباه المنحرفات على المجال.

④ الطريقة التكعيبية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_0+\underbrace{3f_1+3f_2+2f_3+\cdots}_{3,3,2}+f_n\right]$$

$$|e| = \frac{(b-a)h^4}{80}\max_{t\in[a,b]}|f^{(4)}(t)|$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$$ (2 ن) , $n=10$

$h=\frac{3-2}{10}=0,1$

| $x$ | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | ---- | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,4427 | -- | -- | | | | | |

أشباه:

$$\int_2^3\frac{dx}{\ln x} \simeq \frac{0,1}{2}\left[1,4427+2(1,3478+\cdots+0,9392)+0,9102\right]$$

$\simeq 1,1191$

الحد الأعلى للخطأ المرتكب: $|e|=2,03$

المستطيلات:

$$\int \simeq 0,1\left[1,4427+\cdots+0,9392\right] \simeq 1,1457$$

$$|e| = h\,|f(b)-f(a)| = 0,0533$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \; , \; h=0,2$$ ن ع

| $x$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0,961 | 0,852 | 0,698 | 0,527 | 0,368 |

- عدد المجالات = 5 (فردي)

* نطبق سيمبسون لأول 4 مجالات + أشباه المنحرفات لآخر مجال

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{0,2}{3}\left[1+4\times0,961+2\times0,852+4\times0,698+0,527\right]+\frac{0,2}{2}\left[0,527+0,368\right]$$

$= 0,7447$

سيمبسون: $$|e_1| = \frac{(0,8-0)(0,2)^4}{180}\cdot\max_{t\in[0,0,8]} f^{(4)}(t) = 12$$

$= 0,000085$

أشباه: $$|e_2| = \frac{(1-0,8)(0,2)^2}{12}\max_{[0,8,1]}|f''(t)| = 0,0049$$

$\Rightarrow$ الخطأ الكلي الأعظمي: $|e| \leqslant |e_1|+|e_2|$ $0,000575$

(4)

# الاستيفاء الداخلي (الاستكمال)

أ • الفروق المنتهية: هو الفرق بين قيمة f في نقطة (a) وقيمته في نقطة مجاورة (a+h)

$$\Delta f = f(a+h) - f(a)$$

• الفروق التقدمية من المرتبة الأولى: $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

• = = المرتبة الثانية: $\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

ويمكن تعريف فروق من المرتبة الثالثة $\Delta^3 f_i$ و رابعة $\Delta^4 f_i$ و.....

ويتم حسابها بسهولة من خلال الجدول التالي

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | |
| | | $\Delta f_0$ | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | |
| | | $\Delta f_1$ | | $\Delta^3 f_0$ ... |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta^2 f_1$ | |
| | | $\Delta f_2$ | | ⋮ |
| $x_3$ | $f_3$ | | | |

• الفروق التراجعية: الفرق بين قيمة f عند a وقيمته عند نقطة سابقة $(a-h)$

$$\nabla f(a) = f(a) - f(a-h) \xrightarrow{a \leftrightarrow a+h} \nabla f(a+h) = f(a+h) - f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta f(a) = \nabla f(a+h)}$$

• الاستيفاء الخطي: هو تقريب بمعادلة مستقيم، لدينا: $(x_0, y_0)$ $(x_1, y_1)$ ($f_0$, $f_1$)

$$\boxed{f(x) \simeq f_0 + q\Delta f_0}, \quad \boxed{q = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}, \quad h = x_1 - x_0 \text{ الخطوة}$$

• الاستيفاء التربيعي:

$$\boxed{f(x) \simeq f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 f_0}, \quad \boxed{q = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

• صيغة نيوتن:

$$\boxed{f(x) \simeq f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots}$$

**مثال**: اكمل الجدول التالي ثم احسب $\log(1001)$

| $n$ | $x$ | $y$ | $\Delta y \times 10^{-4}$ | $\Delta^2 y \times 10^{-7}$ | $\Delta^3 y \times 10^{-7}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1000 | 3,0000 | | | |
| | | | 43 | | |
| 1 | 1010 | 3,0043 | | ☐ | |
| | | | 43 | | ☐ |
| 2 | 1020 | 3,0086 | | ☐ | |
| | | | 42 | | ☐ |
| 3 | 1030 | 3,0128 | | ☐ | |
| | | | ☐ | | ☐ |
| 4 | 1040 | 3,0170 | | ☐ | |
| | | | ☐ | | |
| 5 | 1050 | 3,0211 | | | |

$\boxed{\log 10 = \frac{\log e}{\ln 10}}$

$$\log(1001) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$\boxed{q = 0,1}$

$$\log(1001) = 3 + 0,1 \times 43 \times 10^{-4} + \cdots = 3,0004$$

صيغة الخطأ:

$$|E_n(x)| = \left|\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right|$$

t: النقطة التي تقع في أصغر مجال يحوي $x_0, \ldots, x_n$

$$f^{(4)}(t) = \frac{-6}{t^4 \ln 10}, \quad E(x) = \frac{0,1(0,9)(1,9)(2,9)\times 10^4}{4 \times 1000^4 \times \ln 10}$$

$\boxed{E \simeq 0,5 \times 10^{-9}} \Leftarrow \boxed{t = 1000}$

⑤ • صيغة لاغرانج: هذه الطريقة لا تشترط ان تكون المسافة بين النقاط متساوية وبحسب العلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} y_1 + \cdots + \frac{L_n(x)}{L_n(x_n)} y_n$$

حيث

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{n} (x - x_j)}$$

أي

$$L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$L_1(x) = (x - x_0) \times (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

عبارة الخطأ:

$$\boxed{E_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)}$$

حيث t قيمة تقع في أصغر مجال يحوي كل النقطة x وجميع النقاط $x_0, \ldots, x_n$

مثال: اكتب كثير حدود لاغرانج الذي يمثل التابع المعرف بالنقاط
$(0,1), (-1,0), (2,-1)$

الحل: كون $\boxed{y_1 = 0}$ ⇐ لا داعي لحساب $L_1(x)$:

$$f(x) = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} y_2$$

• $L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

$L_0(x_0) = L_0(0) = -2$

• $L_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - 0)(x+1) = x^2 + x$

$L_2(x_2) = L_2(2) = 6$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-2} \times 1 + \frac{x^2 + x}{6} \times (-1)$$

$$= \frac{1}{6}\left[-3x^2 + 3x + 6 - x^2 - x\right] = \frac{1}{6}\left[-4x^2 + 2x + 6\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{3}(3 + x - 2x^2)}$$

• لحساب قيمة التابع عند $\boxed{x=1}$ مثلاً: $f(1) = \frac{2}{3}$

الخطأ المرتكب: $f^{(3)}(t) = 0$

$$E = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f^{(3)}(t)$$

$$\Rightarrow E = 0$$

طريقة المربعات الأصغر: لدينا النقاط $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ ⑥

① التمثيل بـ $\boxed{y = a + bx}$ بمجاهيل $a$ و $b$

• نحسب مربعات الأخطاء: $H(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$

يكون $H$ أصغري عندما

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0 \Rightarrow \sum (y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \boxed{na + b\sum x_i = \sum y_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \boxed{a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i}$$

معادلتان بمجهولين ⟸ نوجد $a, b$

مثال: أوجد بطريقة المربعات الأصغر مستقيم يمثل النقاط $(1,0), (-1,1), (0,2)$

نعتبر الخطوات بعدد $n$ ونشكل الجدول $\boxed{n = 3}$

| | ① | ② | ③ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $x_i^2$ | 1 | 1 | 0 | 2 |
| $x_i y_i$ | 0 | -1 | 0 | -1 |

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 0 = 3 \\ 0 + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1}, \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = 1 - \frac{1}{2}x}$$

• حالة اعتماد كثير حدود من الدرجة الثانية: $b_0 + b_1x + b_2x^2$

في هذه الحالة يلزم ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل: $H = \sum (y_i - b_0 - b_1x - b_2x^2)^2$

$$\frac{\partial H}{\partial b_0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_0 n + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

مثال: التمرين ① محلول

• الاستيفاء العاكس: هو ايجاد $(x)$ الموافقة لـ $y$ معطاة.

أهم تطبيقاته هو إيجاد جذور المعادلة $f(x) = 0$.

• يتم ايجاد $x$ بصورة مشابهة لعلاقة لاغرانج: نبدل $x$ بـ $y$ و $y$ بـ $x$

$$x = \frac{L_0(y)}{L_0(y_0)} x_0 + \frac{L_1(y)}{L_1(y_1)} x_1 + \cdots$$

• الطريقة العامة في الاستيفاء: لدينا $(n+1)$ نقطة ونمرر كثير حدود من الدرجة $(n)$ بحيث: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

نعوض بالنقاط فنحصل على $(n+1)$ معادلة بالمجاهيل $(a_0, \dots, a_n)$ نحلها بطريقة كرامر (نحصل على محدد ندعوه محدد فاندرموند)

$\prod (x_j - x_i) : j > i$

تمرين رقم ② ص 18

# مدخل لحل المعادلات التفاضلية العادية

. حل المعادلة $y'=f(x,y)$ هو اي دالة $y=\Phi(x)$ المعرف والقابل للاشتقاق التي تحقق $\Phi'(x)=f(x,\Phi(x))$

. مسألة كوشي هو ايجاد الحل الخاص للمعادلة (1) المحقق $y(x_0)=y_0$.

مثال $y'=3xy$ تحقق $y(1)=1$

$$\frac{y'}{y}=3x \Rightarrow \ln y=\frac{3}{2}x^2+c \Rightarrow y=e^{\frac{3}{2}x^2+c}=A\,e^{\frac{3}{2}x^2} ;\ A=e^{c}$$

$$(1,1)\in:\quad 1=Ae^{6} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{e^{6}}} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e^{6}}\,e^{\frac{3}{2}x^2}}$$

. طريقة أويلر:

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)} \quad \text{حيث} \quad \boxed{\begin{array}{l} h=x_1-x_0 \\ x_n=x_0+nh \end{array}}$$

. طريقة أويلر المعدلة: نوجد قيم استنتاجية الأولية

$$\begin{cases} y^*_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y^*_{n+1})\right] \end{cases} \quad \text{حيث} \quad x_{n+1}=x_n+h$$

. طريقة رونج كوتا:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left[A_n+2B_n+2C_n+D_n\right]$$

حيث

$$A_n=h\,f(x_n,y_n),\quad B_n=h\,f\left(x_n+\frac{h}{2},\,y_n+\frac{A_n}{2}\right)$$

$$C_n=h\,f\left(x_n+\frac{h}{2},\,y_n+\frac{B_n}{2}\right),\quad D_n=h\,f(x_n+h,\,y_n+C_n)$$

مثال

$$y'=x+y \qquad y(0)=0,\ h=0{,}2$$

(1) طريقة أويلر:

$$y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)$$
$$=y_n+0{,}2\,(x_n+y_n)$$
$$\boxed{y_{n+1}=1{,}2\,y_n+0{,}2\,x_n}$$

| n | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,2 | 0 |
| 2 | 0,4 | 0,04 |
| 3 | 0,6 | 0,128 |
| ⋮ | ⋮ | |

(2) طريقة أويلر المعدلة

$$y^*_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)$$

. $y^*_{n+1}=1{,}2\,y_n+0{,}2\,x_n$

. $y_{n+1}=y_n+\frac{0{,}2}{2}\left[x_n+y_n+x_{n+1}+1{,}2y_n+0{,}2x_n\right]$

$$=y_n+0{,}1\left[x_n+y_n+x_n+h+1{,}2y_n+0{,}2x_n\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1}=0{,}22\,x_n+1{,}22\,y_n+0{,}02}$$

| n | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,2 | 0,02 |
| 2 | 0,4 | ⋮ |
| 3 | 0,6 | ⋮ |